Tutti i contenuti dell'unità didattica sul calcolo combinatorio si trovano sul modulo α del testo, unità 1

Studiare tutta la teoria pag 2α - 17α, leggendo e meditando su tutti gli esercizi proposti come esempi nel testo

Esercizi su cui prepararsi per interrogazioni nella settimana tra il 20 ed il 25 febbraio

disposizioni semplici	pag α23 – es. 9-10-11
disposizioni con ripetizione	pag α25 – es. 27-28-30-33
permutazioni (semplici e con ripetizione)	da pag α27 – es. 44-45-58-59-60
combinazioni semplici	da pag α30 – es. da 79 a 89
combinazioni con ripetizione	pag α33 – es. 100-101-102-103
esercizi sui coefficienti binomiali	pag α33 – es. 105 – 109-110-116-117
esercizi vari	pag α37 – es.

ESERCIZI SVOLTI

DISPOSIZIONI SEMPLICI

Vedi con attenzione : esempio nel testo pag α4 – esercizio guida 5 pag α23.

1) Nell'ippica è denominata "corsa Tris" una corsa in cui gli scommettitori devono indovinare i cavalli che arriveranno al 1°, 2° e 3° posto. Supponendo che partano 10 cavalli, quanti sono i possibili ordini d'arrivo nelle prime tre posizioni?

- Questo significa calcolare il numero di modi diversi in cui si possono disporre in ordine 3 cavalli scelti nell'insieme di 10. Tale numero è perciò $D_{10;3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

2) In quanti modi diversi possono essere sistemati su una libreria 7 libri scelti da 20 di cui si dispone ?

- Devo disporre in ordine 7 oggetti scelti da un gruppo di 20

$$D_{20;7} = \underbrace{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}_{7\,fattori} = \frac{20!}{(20-7)!} = \frac{20!}{13!} = 390.700.800$$

3) Tra tutti i numeri di 6 cifre, tutte diverse tra loro, quanti sono quelli le cui prime cifre sono dispari e le restanti pari?

- Devo disporre in ordine, senza ripetizioni, tre cifre pari scelte tra 5 (0,2,4,6,8) $D_{5;3} = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{3\,fattori} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$, e poi , ad ognuna di queste 60 disposizioni, devo "accodare" una qualsiasi delle altre disposizioni delle tre cifre dispari, ordinate e senza ripetizioni, scelte tra 5 (1,3,5,7,9) $D_{5;3} = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{3\,fattori} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

Il totale è perciò 60x60=3600

4) 15 squadre di calcio disputano un torneo all'italiana, in cui ognuna incontra tutte le altre in un girone di andata e ritorno (equivalente a dire che si deve giocare sia Inter-Milan che Milan-Inter), cioè che due accoppiamenti differiscono anche in base all'ordine con cui vengono disposte le squadre)

- Il numero di partite totale è perciò il numero in cui si possono disporre, con ordine e senza ripetizione, due squadre scelte tra 15: $D_{15;2} = \underbrace{15 \cdot 14}_{2\,fattori} = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15!}{13!} = 210$

DISPOSIZIONI con RIPETIZIONE

Vedi con attenzione : esempio nel testo pag α6 – esercizio guida 25 pag α25.

1) Quante colonne occorrerebbe giocare al Totocalcio, per essere sicuri di fare 13?

- Per essere sicuro di vincere dovrei giocare tutte le possibili colonne. Ogni colonna è un insieme ordinato di 13 simboli, necessariamente ripetuti, scelti nell'insieme $\{1,2,x\}$ ossia è una disposizione di 3 elementi di classe 13: $D'_{3;13} = 3^{13} = 1.594.323$

  Adesso nella schedina del Totocalcio ci sono 14 partite: il numero di colonne possibili è $D'_{3;14} = 3^{14} = 4.782.969$, e la probabilità di vincere si è ridotta ad un terzo di quella che era prima.

2) Da quante colonne è costituito un sistema del totocalcio di 4 triple? E uno di 6 doppie? E uno di 4 triple e 6 doppie

- Una tripla al Totocalcio significa che per quella partita tutti 3 i risultati sono validi. Un sistema con una tripla vuol dire quindi che 13 pronostici sono fissi e per il 14° vanno bene tutti e tre i simboli: equivale quindi a giocare 3 colonne. Un sistema con quattro triple significa che 10 pronostici sono fissi e per gli altri 4 vengono accettati tutti i risultati che possono essere 3 per ogni partita: il numero totale di possibilità (e quindi di colonne giocate) è $D'_{3;4} = 3^4 = 81$

  Una doppia vuol dire che per quel pronostico sono ugualmente accettabili due risultati: un sistema con una doppia e 13 pronostici fissi equivale a 2 colonne. Un sistema con 6 doppie e 7 risultati fissi equivale a $D'_{2;6} = 2^6 = 64$ colonne. Uno di 4 triple e 6 doppie: $81x64 = 5184$ colonne (n.b. giocarlo costerebbe €2592)

3) Le targhe automobilistiche sono costituite da 2 lettere, 3 cifre, 2 lettere. Sapendo che le letteree possono venire scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone, si calcoli quante targhe differenti possono essere ottenute e quindi quante automobili possono essere immatricolate?

- Con due lettere scelte tra 26, con possibile ripetizione e tenendo conto dell'ordine, posso ottenere $D'_{26;2} = 26^2 = 676$ disposizioni . Con tre cifre posso ottenere

  $D'_{10;3} = 10^3 = 1000$ numeri (ovviamente sono i numeri da 001 a 999 + 000). Per cui il totale sarà 676x1000x676= 456.976.000

PERMUTAZIONI (semplici e con ripetizione)

Esercizi guida n° 39 e 56

1) Una partita di calcio tra la squadra A e B è finita 4 a 3. In quanti modi diversi possono essersi succedute le reti?

- $P_7^{(4,3)} = \frac{7!}{4!3!}$ Infatti, indicando con *a* le reti di A e *b* le reti di B, ogni possibile sequenza di gol equivale ad una permutazione dei simboli *aaaabbb*

COMBINAZIONI SEMPLICI $D_{n.k} = C_{n.k} \cdot P_k$

Vedi con attenzione : esempio nel testo pag α13 – esercizio guida 78 pag α30.

1) Nel **Poker** si distribuiscono, ad ogni giocatore, 5 carte estratte da un mazzo di 32. In quanto modi diversi si possono ricevere le carte?

- Questo esercizio equivale a contare le possibili "mani" di poker. Poiché l'ordine in cui si ricevono le carte non ha importanza, ogni "mano" corrisponde ad una possibile combinazione di 5 carte estratte da un insieme di 32 $C_{32,5} = \frac{D_{32,5}}{P_5} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5!} = \frac{32!}{(32-5)!5!} = 201.376$

  Quanti sono i modi in cui si può ottenere una scala reale massima di cuori (AKQJ10 di cuori?): ovviamente uno solo! Da qui si può capire che la probabilità di avere scala reale massima di cuori è 1/201.376. Essendo 4 i semi, il numero di scale reali massime che si possono fare è 4.

  Quanti sono i modi in cui si può ottenere poker d'assi? I 4 assi si possono ottenere in un solo modo, ma la quinta carta può essere una qualsiasi tra le restanti 28. Per cui i modi sono 28. La probabilità di fare poker d'assi è di 28/201.376=1/7129

  Essendoci 8 valori per seme, i possibili poker sono 8, realizzabili in 28x8=224 modi. La probabilità di fare poker è di 224/201.376=1/899

  Quanti sono i modi in cui si può ottenere "colore" (tutte le carte dello stesso seme?) Sono le possibili combinazioni di 5 carte da un insieme di 8 dello stesso seme:

  $C_{8,5} = \frac{D_{8,5}}{P_5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} = 56$. Essendo 4 semi 56x4=224 La probabilità di fare poker o colore è la stessa.

  Attenzione che se gioco con 36 carte (A,K,Q,J,10,9,8,7,6) il numero di mani diventa $C_{36,5} = 376.992$, il numero di poker 32x9= 288, il numero di possibili "colore" $C_{9,5} = \frac{D_{9,5}}{P_5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 126$ per ogni seme cioè 126x4= 504 in totale . Il che vuol dire che la probabilità di fare poker è 288/376.992=1/1309, la probabilità di fare colore è 504/376.992=1/748. Questo è il motivo per cui il poker batte il colore.

  Nel poker americano, con 52 carte, anche il full batte il colore perchè la probabilità di fare colore aumenta con il numero di carte disponibili per seme.

COMBINAZIONI con RIPETIZIONE

Vedi con attenzione : esempio nel testo pag α13 – esercizio guida 99 pag α32

1) Quale è il numero massimo di termini che può comparire in un polinomio omogeneo di 3° grado in 4 variabili *x,y,z,t* ?

- La parte letterale di ciascun termine del polinomio (che ovviamente non presenterà monomi simili) può essere associata ad una combinazione con ripetizione di classe 3 (tutti i monomi devono essere di terzo grado se il polinomio è omogeneo) degli elementi dell'insieme $\{x,y,z,t\}$: il numero di volte in cui un elemento si ripete sarà l'esponente della variabile (es. la combinazione *xxt* equivale al monomio x^2t)

  Il numero massimo di termini che il polinomio può contenere è perciò $C^r_{4,3} = \frac{(4+3-1)!}{3!3!} = \frac{6!}{3!3!}$ equivalente a $C^r_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$

I problemi di suddivisione in gruppi di oggetti indistinguibili si possono spesso ricondurre al calcolo di combinazioni con ripetizione.

2) In quanti modi diversi posso distribuire 12 penne in 5 cassetti? (ogni cassetto può contenere da 0 a 12 penne e le 12 penne possono essere considerate indistinguibili).

- Se chiamiamo a,b,c,d,e i 5 cassetti, ogni modo in cui posso distribuire le penne può essere rappresentato da una sequenza di lettere prese una per ogni penna inserita nel corrispondente cassetto: es. *aabbbcccdddd* vuol dire che ho messo 2 penne in a, 3 in b, 3 in c, 4 in d e 0 in e.

  Perciò il numero di modi cercato è il numero di combinazioni con ripetizione di 5 oggetti in classe 12, cioè $C^r_{5,12} = \frac{(5+12-1)!}{12!4!} = \frac{16!}{12!4!}$ equivalente a $C^r_{5,12} = \binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12} = \binom{16}{4} = \frac{16!}{12!4!} = 1820$

3) Se ora pongo la condizione che in ogni cassetto ci debba essere almeno una penna ?

- Dopo aver distribuito una penna in ognuno dei 5 cassetti, mi rimangono 7 penne da distribuire con le stesse modalità dell'esercizio precedente, per cui il numero di modi possibili sarà : $C^{r}{}_{5,7} = \frac{(5+7-1)!}{7!4!} = \frac{11!}{7!4!}$ =330
-

COEFFICIENTI BINOMIALI

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)......(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Ricordando che $0! = 1$ e $1! = 1$

- dimostrare che $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{0}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$;
- dimostrare che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; legge delle classi complementari

la prima uguaglianza si può dimostrare anche logicamente: $\binom{n}{k} = C_{n,k}$ è il numero di combinazioni che posso formare scegliendo k elementi da un gruppo di n . Per ogni combinazione scelta mi rimangono definiti anche i restanti n-k elementi scartati (ricorda che l'ordine non conta). Il numero di combinazioni dei n-k elementi restanti $\binom{n}{n-k} = C_{n,n-k}$ è perciò uguale al numero di combinazioni dei k elementi.

Tale formula, detta "legge delle classi complementari" è comoda per velocizzare i conti

Es:

$\binom{9}{7} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}$ altrimenti, posso saltare il passaggio centrale essendo: $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}$

- dimostrare che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ formula di Stifel

La formula di Stifel è utile per dimostrare la formula del binomio di Newton es. $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$

ESERCIZI VARI

Codici fiscali

Il codice fiscale è una sequenza alfanumerica così composta $\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{\text{6 lettere}}\underbrace{\boxtimes\boxtimes\square\boxtimes\boxtimes}_{\text{data nascita}}\square\underbrace{\boxtimes\boxtimes\boxtimes}_{\text{3 cifre}}\square$

Le prime sei lettere sono consonanti che codificano cognome e nome (si usano anche le vocali se il cognome o il nome non contengono almeno tre consonanti) - la data di nascita è scritta nel formato ggMaa per gli uomini e gg+40Maa per le donne, in cui M è una lettera indicativa del mese.

I successivi 4 caratteri indicano il comune di nascita e sono una lettera e tre cifre. L'ultimo carattere è un carattere di controllo e viene generato automaticamente a seconda dei caratteri precedenti. Calcolare quante sequenze differenti potrebbero essere create.